

δ 函数的性质

2025 年 12 月 17 日

1. 定义性质： δ 函数是通过其积分值来定义的

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & x_0 \in (a, b) \\ 0 & x_0 \notin [a, b] \end{cases} \text{ and } \delta(x - x_0) = 0 \text{ for } x \neq x_0 ,$$

其中的积分为正向积分，对于任意在 x_0 处连续的函数 $f(x)$

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \in (a, b) \\ 0 & x_0 \notin [a, b] \end{cases} .$$

2. 微分性质：采用分步积分可以建立恒等式

$$\int_a^b f(x) \frac{d}{dx} [\delta(x - x_0)] dx = \begin{cases} -\frac{df(x)}{dx} |_{x=x_0} & x_0 \in (a, b) \\ 0 & x_0 \notin [a, b] \end{cases} ,$$

证明：

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \frac{d}{dx} [\delta(x - x_0)] dx &= f(x) \delta(x - x_0) |_a^b - \int_a^b \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] \delta(x - x_0) dx \\ &= -\frac{df(x)}{dx} |_{x=x_0} . \end{aligned}$$

3. 偶函数性质：

$$\int_a^b f(x) \delta(-[x - x_0]) dx \equiv \int_a^b f(x) \delta(+[x - x_0]) dx = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \in (a, b) \\ 0 & x_0 \notin [a, b] \end{cases} .$$

4. 缩放性质：

$$\int_a^b f(x) \delta(k[x - x_0]) dx = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{|k|} & x_0 \in (a, b) \\ 0 & x_0 \notin [a, b] \end{cases} ,$$

证明：令 $u = kx$ ，则有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \delta(k[x - x_0]) dx &= \int_{ka}^{kb} f\left(\frac{u}{k}\right) \delta(u - kx_0) \frac{1}{k} du \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|k|} f\left(\frac{kx_0}{k}\right) & kx_0 \in (ka, kb) \\ 0 & kx_0 \notin [ka, kb] \end{cases} , \end{aligned}$$

5. 高级缩放性质：将函数 g 作为 δ 函数的参量， $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是连续并连续可微的

$$\int_a^b f(x) \delta[g(x) - g(x_0)] dx = \begin{cases} f(x_0) / \left| \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} & x_0 \in (a, b) \\ 0 & x_0 \notin [a, b] \end{cases} ,$$

6. 多参量零点性质: δ 函数参量 $g(x) - g(x_0)$ 有多个零点, 其缩放性质为

$$\int_a^b f(x) \delta[g(x) - g(x_0)] dx = \sum_{x_j \ni g(x_j)=g(x_0), x \in (a,b)} f(x_j) / \left| \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_j},$$

7. 多参数零点微分性质

$$\int_a^b f(x) \frac{d}{dx} (\delta[g(x) - g(x_0)]) dx = \sum_{x_j \ni g(x_j)=g(x_0), x \in (a,b)} \left(-\frac{df(x_j)}{dx} \right) / \left| \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_j},$$

参考文献

[1] Tank, 2009, The Dirac Delta: Properties and Representations.