外微分形式与外微分

2025 年 12 月 17 日

Stokes 公式是微积分中最本质的，有它引出了微分几何，广义相对论等内容。外微分形式把 Stokes，Gauss 公式联系起来，而且推广到高维空间。Poincare 指出多重积分的体积元素应该有一个方向导致了外微分的出现。区别于普通微分形式，外微分的三个作用：

1. 将线积分，面积分，体积分的三个基本公式，即 Green 公式，Gauss 公式，Stokes 公式联系起来。
2. 可以与物理中的梯度，旋度，散度联系起来。
3. 可以体现多变量微积分中微分，积分的对立统一的运算。

1 普通微分形式到外微分形式

普通微分形式与外微分形式的区别为普通微分形式是不定向的而外微分形式是定向的。下面先介绍普通微分形式，在介绍外微分形式及其性质。

普通微分形式

令 f, A, B, C, P, Q, R, H 为 x, y, z 的函数

零次微分形式——定义为函数 f

一次微分形式——定义为具有微分 dx, dy, dz 的一次式的集合，例如 $w = Adx+Bdy+Cdz$，可应用于线积分 $\int Adx+Bdy+Cdz$。

二次微分形式——定义为具有微分 dx, dy, dz 的二次式的集合，满足普通微积分乘法规则，$dxdx = 0, dxdy = dydx$，例如 $\alpha = Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$，可应用于面积分 $\iint Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$。

三次微分形式——定义为具有微分 dx, dy, dz 的三次式的集合，满足普通微积分乘法规则，$dxdx = 0, dxdy = dydx$，例如 $\lambda = Hdxdydz$，可应用于体积分 $\iiint Hdxdydz$。

由曲面定向得到外微分形式

曲面的定向定义为法线从起点连续移动直到回到起点，根据法线方向是否改变来为曲面定向。典型的不可定向的曲面为莫比乌斯带，根据曲面定向的定义，莫比乌斯带中的一点，可以通过一个连续路径回到起点时法线方向发生改变。一旦对曲面进行定向，曲面面积的面积元素会因为方向不同被定义成正负。

根据二重积分定义，再将面积元素进行变元变换

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv, \tag{1}$$

在未对面积元素进行定向时，为了保证面积元素始终为正，对式中的 Jacobi 行列式取了绝对值。对面积元素定向后，Jacobi 行列式就不需要取绝对值了。则有

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv, \tag{2}$$

其中 D 已定向，D' 是 D 经过变元逆变换得到的区域，也是定向的。因此有

$$dxdy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv, \tag{3}$$

该式有如下两个性质:

(1)

$$dxdx = \frac{\partial(x,x)}{\partial(u,v)}dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = 0, \tag{4}$$

(2)

$$dydx = \frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = -\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = -dxdy, \tag{5}$$

满足上面两条性质的微分乘积被称为外乘积，记为 $dx \wedge dy$，即有 $dx \wedge dx = 0, dx \wedge dy = -dy \wedge dx$。由外乘积来定义外微分形式。

2 外微分形式及其性质

令 f, P, Q, R, A, B, C, H 为 x, y, z 的函数

零次外微分形式——定义为函数 f。

一次外微分形式——定义为具有微分 dx, dy, dz 的一次式的集合，例如 $w = Adx + Bdy + Cdz$。

二次外微分形式——定义为具有微分 dx, dy, dz 的二次式的集合，微分乘积满足外乘积，$dx \wedge dx = 0, dx \wedge dy = -dy \wedge dx$，例如 $\alpha = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$。

三次外微分形式——定义为具有微分 dx, dy, dz 的三次式的集合，微分乘积满足外乘积，$dx \wedge dx = 0, dx \wedge dy = -dy \wedge dx$，例如 $\lambda = Hdx \wedge dy \wedge dz$。

外微分形式的性质：任意三个外微分形式 λ, μ, ν 的外乘积满足分配律，结合律，但不满足交换律。

如果 λ, μ, ν 是任意三个外微分形式

分配律:

$$(\lambda + \mu) \wedge \nu = \lambda \wedge \nu + \mu \wedge \nu, \tag{6}$$

$$\lambda \wedge (\mu + \nu) = \lambda \wedge \mu + \lambda \wedge \nu, \tag{7}$$

结合律:

$$\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu, \tag{8}$$

如果 μ 为 p 次外微分形式，λ 为 q 次外微分形式

$$\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu, \tag{9}$$

3 外微分算子 d

定义外微分算子 d，作用于外微分形式上得到该外微分形式的外微分。

零次外微分形式 f 的外微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz, \tag{10}$$

实际上就是普通的全微分算子。

一次外微分形式 $w = Pdx + Qdy + Rdz$ 的外微分

$$dw = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz, \tag{11}$$

由于

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz, \tag{12}$$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz, \tag{13}$$

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz, \tag{14}$$

带入得

$$\begin{aligned} dw =& \frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx \\ &+ \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \wedge dy \\ &+ \frac{\partial R}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial z}dz \wedge dz, \end{aligned}$$

由于

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0,$$

$$dy \wedge dx = -dx \wedge dy, dz \wedge dy = -dy \wedge dz, dx \wedge dz = -dz \wedge dx,$$

所以

$$dw = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx. \tag{15}$$

二次外微分形式 $w = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$ 的外微分

$$dw = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy, \tag{16}$$

同理，将 dA, dB, dC 的表达式带入得

$$\begin{aligned} dw =& \frac{\partial A}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial A}{\partial y}dy \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial A}{\partial z}dz \wedge dy \wedge dz \\ &+ \frac{\partial B}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial B}{\partial y}dy \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial B}{\partial z}dz \wedge dy \wedge dz \\ &+ \frac{\partial C}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial C}{\partial y}dy \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial C}{\partial z}dz \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

根据外乘积的性质，有

$$dw = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz, \tag{17}$$

三次外微分形式 $w = dH \wedge dx \wedge dy \wedge dz$ 的外微分为

$$dw = dH \wedge dx \wedge dy \wedge dz, \tag{18}$$

同理，将 dH 的表达式带入，并根据外乘积的性质有

$$dw = 0, \tag{19}$$

4 Poincare 引理

Poincare 引理:

引理 1. 若 w 是一个外微分形式，其微分形式的系数具有二阶连续偏微商，则 $ddw = 0$。

Poincare 引理的逆:

引理 2. 若 w 是一个 p 次外微分形式且 $dw = 0$，则存在一个 $p-1$ 次外微分形式 a，使 $w = da$。

对 Poincare 引理进行验证：

零次外微分形式 $w=f$，其外微分如方程 (10)，即

$$dw=df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

然后

$$\begin{aligned}ddw=&ddf=d(\frac{\partial f}{\partial x})\wedge dx+d(\frac{\partial f}{\partial y})\wedge dy+d(\frac{\partial f}{\partial z})\wedge dz\\=&(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dz)\wedge dx+(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dz)\wedge dy\\&+(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}dy+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz)\wedge dz,\end{aligned}$$

根据外乘积的性质，得

$$\begin{aligned}ddw=&(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y})dx\wedge dy+(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z})dy\wedge dz\\&+(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z})dx\wedge dz,\end{aligned}$$

假设 f 具有二阶连续偏微商，则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x},$$

所以

$$ddw=ddf=0,\tag{20}$$

二次外微分形式 $w_1=Pdx+Qdy+Rdz$，其外微分为方程 (15)，即

$$dw_1=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dy\wedge dz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dz\wedge dx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dx\wedge dy,$$

然后

$$\begin{aligned}ddw_1=&\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}dx\wedge dy\wedge dz-\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}dx\wedge dy\wedge dz+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}dy\wedge dz\wedge dx\\&-\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}dy\wedge dz\wedge dx+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}dz\wedge dx\wedge dy-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}dz\wedge dx\wedge dy\\=&(\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y})dx\wedge dy\wedge dz,\end{aligned}$$

假设 P,Q,R 都具有二阶连续偏微商，则有

$$\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}=\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y},$$

因此

$$ddw_1=0,\tag{21}$$

二次外微分形式 $w_2=Adx\wedge dy+Bdy\wedge dz+Cdz\wedge dx$，其外微分为方程 (17)，即

$$dw_2=dA\wedge dx\wedge dy+dB\wedge dy\wedge dz+dC\wedge dz\wedge dx,$$

可得

$$ddw_2=0,\tag{22}$$

三次外微分形式 $w_3=Hdx\wedge dy\wedge dz$，其外微分为

$$dw_3=0,$$

因此

$$ddw_3=0,$$

外微分形式的次数	度
0	梯度
1	旋度
2	散度

表 1: 外微分形式的外微分与梯度、旋度和散度的对应关系

5 外微分形式的外微分与物理中梯度、旋度和散度之间的关系

零次外微分形式 $w = f$ 的外微分与其梯度

$$dw = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{23}$$

一次外微分形式 $w_1 = Pdx + Qdy + Rdz$ 的外微分

$$\begin{aligned} dw_1 &= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy \\ &= \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{24}$$

矢量 $\boldsymbol{u} = (P, Q, R) = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 的旋度为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} &= (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\boldsymbol{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\boldsymbol{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\boldsymbol{k} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{25}$$

二次外微分形式 $w_2 = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$ 的外微分

$$dw_2 = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz,$$

矢量 $\boldsymbol{v} = (A, B, C)$ 的散度

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}, \tag{26}$$

因此得到如下外微分形式的外微分与梯度、旋度和散度的对应关系

6 Poincare 引理与梯度、旋度和散度的对应关系

零次外微分形式 $w = f$，有 $ddw = ddf = 0$，对应于函数 f 梯度的旋度

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) = 0, \tag{27}$$

一次外微分形式 $w_1 = Pdx + Qdy + Rdz$，有 $ddw_1 = 0$，对应于矢量 $\boldsymbol{u} = (P, Q, R)$ 旋度的散度

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) = 0, \tag{28}$$

二次外微分形式 $w_2 = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$，有 $ddw_2 = 0$，对应于矢量 $\boldsymbol{v} = (A, B, C)$ 散度的梯度

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) = 0, \tag{29}$$

---

7 外微分形式与外微分形式的外微分作为被积函数与 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式的关系

Green 公式

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy, \tag{30}$$

一次外微分形式 $w_1 = Pdx + Qdy$，其外微分

$$dw_1 = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy,$$

则有

$$\oint w_1 = \iint dw_1, \tag{31}$$

Gauss 公式

$$\oiint_{\Sigma_{out}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz, \tag{32}$$

二次外微分形式 $w_2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$，其外微分为

$$dw_2 = (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz, \tag{33}$$

则有

$$\oiint w_2 = \iiint dw_2, \tag{34}$$

Stokes 公式

$$\begin{aligned}\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma &(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz \\ &+ (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy,\end{aligned} \tag{35}$$

一次外微分形式 $w_1 = Pdx + Qdy + Rdz$，其外微分为

$$dw_1 = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy, \tag{36}$$

则有

$$\oint w_1 = \iint dw_1, \tag{37}$$

综上，Green 公式、Gauss 公式、Stokes 公式实际上是一个公式

$$\int_{\partial\Sigma} w = \int_\Sigma dw, \tag{38}$$

其中 w 为外微分形式，dw 为 w 的外微分，Σ 为 dw 的封闭区域，$\partial\Sigma$ 为 Σ 的边界，$\int$ 积分的重数与空间维数相同。

参考文献

[1] https://www.cnblogs.com/HuisClos/p/6966036.html