Euler-Maruyama 方法

2025 年 12 月 17 日

这篇文章的主要参考文献为 Desmond J. Higham(2001)[1]

将随机微分方程写成积分形式有

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s),\ 0 \le t \le T. \tag{1}$$

其中 f, g 都是标量函数并且初始条件 X_0 是随机变量。这里的积分采用的是 Ito 积分，方程的解 $X(t)$ 是随 t 变化的随机变量。现在定义一种求解上述方程的数值方法，并且将数值方法在时间步长趋于 0 时所得的随机变量 $X(t)$ 作为方程的解。将方程写为微分形式有

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t),\ X(0) = X_0,\ 0 \le t \le T. \tag{2}$$

在区间 [0, T] 采用一个算法来求解上面微分方程，首先进行离散处理。使 $\Delta t = T/L$，其中 L 为某一正整数，并且有 $\tau_j = j\Delta t$。数值近似 $X(\tau_j)$ 表示成 X_j。Euler-Maruyama 具有如下形式

$$X_j = X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{j-1})(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})),\ j = 1, 2, ..., L. \tag{3}$$

方程 (3) 可以由积分形式来理解，积分形式为

$$X(\tau_j) = X(\tau_{j-1}) + \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f(X(s))ds + \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} g(X(s))dW(s). \tag{4}$$

方程 (3) 中每一项都和方程 (4) 相对应，当 $g \equiv 0$ 时，方程 (3) 退化成 Euler 方法。

首先我们将离散 Brownian 路径来生成方程 (3) 所需要的增量 $W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})$，为了方便起见，我们将时间步长选为 Brownian 路径增量 δt 的整数倍 $R\delta t$，其中 $R \ge 1$ 为整数。这样可以使得采用 Euler-Maruyama 计算的时间点序列 $\{\tau_j\}$ 是包含在 Brownian 路径的时间序列 $\{t_j\}$ 中的。列举一个将 Euler-Maruyama 方法应用到线性 SDE 的例子

$$dX(t) = \lambda X(t)dt + \mu X(t)dW(t),\ X(0) = X_0 \tag{5}$$

其中 λ 和 μ 都是实常数；因此在方程 (2) 中 $f(X) = \lambda X$ 和 $g(X) = \mu X$。这个是金融数学中的 Black-Scholes 偏微分方程可以由方程 (5) 得到 [2]。方程 (5) 的解析解为 [3]

$$X(t) = X(0)\exp((\lambda - \frac{1}{2}\mu^2)t + \mu W(t)). \tag{6}$$

取 $\lambda = 2,\ \mu = 1,\ X_0 = 1$。令 Brownian 路径在区间 [0, 1] 之间和 $\delta t = 2^{-8}$，并且按照方程 (6) 得到方程的解析解 $Xture$。然后采用 Euler-Maruyama 计算时采用时间步 $\Delta t = R\delta t$，令 $R = 4$。采用

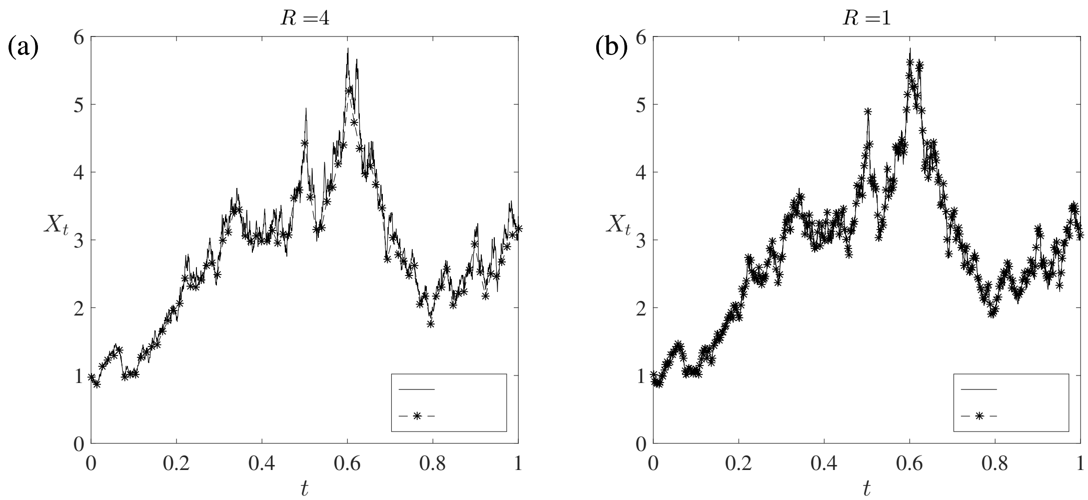

图 1: Black-Scholes 偏微分方程的解析解与数值解的对比

Euler-Maruyama 的一般步长所对应的增量 $W(\tau_j) - W(\tau_j)$ 的数值为

$$W(\tau_j) - W(\tau_{j-1}) = W(jR\delta t) - W((j-1)R\delta t) = \sum_{k=jR-R+1}^{jR} dW_k$$

数值解则根据公式

$$X^{n+1} = X^n + \lambda X^n \Delta t + \mu X^n (W^{n+1} - W^n)$$

由此得到 Euler-Maruyama 方法的数值解。得到结果如图 1

此时在 $t = T$ 的点数值解和解析解的误差为 $emerr = 0.6907$，当取 $R = 1$ 时，如图 1，在 $t = T$ 的点数值解和解析解的误差为 $emerr = 0.0821$。

如果我们采用 Milstein method，则需要根据公式

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n)\Delta t + b(Y_n)\Delta W_n + \frac{1}{2} b(Y_n) b'(Y_n)((\Delta W_n)^2 - \Delta t),$$

在上述例子中，$a(Y_n) = \lambda X^n$，$b(Y_n) = \mu X^n$，因此有

$$X^{n+1} = X^n + \lambda X^n \Delta t + \mu X^n (W^{n+1} - W^n) + \frac{1}{2}\mu^2 X^n ((W^{n+1} - W^n)^2 - \Delta t),$$

如果取与方程 (5) 具有相同形式的 Stratonovich SDE，即

$$dX(t) = \lambda X(t) dt + \mu X(t) \circ dW(t),\ X(0) = X_0,$$

采用 Euler-Maruyama 进行数值计算，则得

$$X_{sf}^{n+1} = X_{sf}^n + \lambda X_{sf}^n \Delta t + \mu \frac{X_{sf}^{n+1} + X_{sf}^n}{2} (W^{n+1} - W^n),$$

而由 Ito 积分与 Stratonovich 积分关系所得的 Stratonovich SDE 为

$$dX(t) = [\lambda X(t) - \frac{1}{2}\mu^2 X(t)]dt + \mu X(t) \circ dW(t), X(0) = X_0,$$

采用 Euler-Maruyama 进行数值计算，则得

$$X_s^{n+1} = X_s^n + [\lambda X^n - \frac{1}{2}\mu^2 X^n]\Delta t + \mu \frac{X_s^{n+1} + X_s^n}{2}(W^{n+1} - W^n),$$

如果采用 Milstein method，则得

$$X_s^{n+1} = X_s^n + [\lambda X^n - \mu^2 X^n]\Delta t + \mu \frac{X_s^{n+1} + X_s^n}{2}(W^{n+1} - W^n) + \frac{1}{2}\mu^2 \frac{X^{n+1} + X^n}{2}(W^{n+1} - W^n)^2,$$

参考文献

[1] Desmond J. Higham, An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochatic Differential Equations, SIAM REVIEW, 43(3), 2001, 525-546.

[2] J. C. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives, 6th ed., Pearson PH, 2009, 307-309.

[3] X. Mao, Stochatic Differential Equations and Applications, Horwood, Chichester, 1997, 105.